

Método de Thomas para matrices tridiagonales

- Este método de resolución de matrices tridiagonales se basa en un método tradicional de sustitución.
- Debido a la poca densidad de términos en este tipo de matriz, la secuencia de cálculos puede ser conducida de tal forma que se reduzca considerablemente el número de operaciones.

Método de Thomas

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2\ n-2} & a_{n-2\ n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1\ n-2} & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n\ n-1} & a_{n\ n}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 x_{n-2} \\
 x_{n-1} \\
 x_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 b_3 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 b_{n-2} \\
 b_{n-1} \\
 b_n
 \end{pmatrix}$$

Método de Thomas

- El proceso de sustitución que se aplica a cada línea es equivalente al método de Gauss con pivote, pero se simplifica debido a la presencia de los numerosos ceros:

$$a'_{ii} = a_{ii} - a_{i-1i} \frac{a_{ii-1}}{a_{i-1i-1}} \quad b'_i = b_i - b_{i-1} \frac{a_{ii-1}}{a_{i-1i-1}}$$

Método de Thomas

- Los $a_{i \ i-1}$ transformados son siempre nulos (posición por debajo del pivote) y los $a_{i \ i+1}$ quedan inalterados por que el valor en la posición superior a ellos es también siempre nula. El sistema se transforma en:

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a'_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a'_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & a_{n-3 \ n-2} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{n-2 \ n-2} & a_{n-2 \ n-1} & 0 & x_{n-2} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{n-1 \ n-1} & a_{n-1 \ n} & x_{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{n \ n} & x_n
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 x_{n-2} \\
 x_{n-1} \\
 x_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_1 \\
 b'_2 \\
 b'_3 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 b'_{n-2} \\
 b'_{n-1} \\
 b'_n
 \end{pmatrix}$$

Método de Thomas

- Una vez terminada la fase de sustitución en todas las ecuaciones, se puede proceder al cálculo del vector solución mediante las ecuaciones:

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b'_i - a'_{i,i+1}x_{i+1}}{a'_{ii}}$$

Método de LU

- En el método de Gauss tradicional, el hecho de que se pueda llegar a una forma triangular simplifica sustancialmente los cálculos al tener solamente una sustitución inversa que realizar. La premisa del método LU es justamente la descomposición en matrices triangulares, razón por la cual esta característica pueda ser aprovechada.

Método de LU

→ El problema a resolver es:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

→ La introducción de la descomposición LU conduce a:

$$\mathbf{LUx}=\mathbf{b}$$

→ Si ahora se introduce la variable intermedia \mathbf{z} igual al producto \mathbf{Ux} , se llega a:

$$\mathbf{Lz}=\mathbf{b}$$

Método de LU

- Esta última ecuación permite obtener por simples sustituciones el vector \mathbf{z} ya que $z_1 = b_1/l_{11}$, $z_2 = (b_2 - l_{21}z_1)/l_{22}$ y así sucesivamente.

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

Método de LU

- Una vez conocido el vector \mathbf{z} , es muy fácil utilizar una técnica similar para obtener \mathbf{x} ya que

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix}$$

MÉTODOS ITERATIVOS

- Los métodos iterativos se basan en hacer una sustitución de una de las variables (distinta para cada ecuación) y expresar esta variable en función de las otras.
- El problema se transforma en un proceso iterativo ya que se requiere tener un primer estimado de lo que podría ser la solución.

MÉTODOS ITERATIVOS

- Con este primer vector solución se puede calcular un nuevo vector modificado de la solución.
- Al repetir estas operaciones numerosas veces, se obtiene una aproximación cada vez mejor de la solución.
- El proceso iterativo se detiene cuando la solución es suficientemente estable entre dos operaciones consecutivas.

MÉTODOS ITERATIVOS

- El primer estimado que suele usarse para hallar el vector solución es el vector nulo.
- Entre los métodos iterativos se encuentran el de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación.

Método iterativo de Jacobi

- De todos los métodos iterativos, el método de Jacobi es el más sencillo de aplicar y comprender.
- Sin embargo no es un proceso muy eficiente en cuanto a la obtención del resultado.

Método iterativo de Jacobi

- Este conjunto de ecuaciones puede ser escrito en forma matricial si se descompone la matriz \mathbf{A} en la suma de tres matrices (una triangular inferior con ceros en la diagonal, una diagonal y una triangular superior con ceros en la diagonal). $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$.
- De la igualdad original correspondiente al sistema lineal $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede entonces obtener:

Método iterativo de Jacobi

- $(\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U})\mathbf{x}=\mathbf{b}$
- $\mathbf{D}\mathbf{x}=\mathbf{b}-(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}$
- Esta última forma indica que el vector \mathbf{x} puede ser obtenido a partir de un estimado inicial del mismo vector \mathbf{x} .
- Esta forma, conocida como forma implícita, permite obtener en forma iterativa una aproximación cada vez mejor del vector \mathbf{x} solución del sistema lineal.

Método iterativo de Jacobi

- Para diferenciar las etapas sucesivas de cálculo del vector \mathbf{x} , se le suele indicar el orden de la iteración como superíndice. La expresión anterior se transforma entonces en:
- $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)})$

Método iterativo de Jacobi

- Siendo la matriz D una matriz diagonal, su inverso se obtiene simplemente reemplazando el termino de la diagonal por su propio inverso ($1/a_{ii}$).
- En cuanto a la operación de cálculo propiamente dicho, su expresión es:

$$X_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} X_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Método iterativo de Jacobi

- Como se había mencionado anteriormente, si bien este método es sumamente sencillo para ponerlo en funcionamiento, su rendimiento en cuanto a número de iteraciones hace poco interesante su uso.

Método iterativo de Jacobi

- En lo que se refiere a convergencia, una condición suficiente (pero no necesaria) es que la matriz \mathbf{A} inicial sea diagonalmente dominante.
- Esta condición se cumple si:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Método iterativo de Jacobi

- En realidad, estos sistemas lineales pueden llegar a converger aún si todas sus líneas no cumplen con este requisito.
- En los nuevos programas usando procesadores en paralelo, se está usando el método de Jacobi por permitir separar la información y procesarla en forma paralela (Smith, 1992).

Método iterativo de Gauss-Seidel

- El método de Gauss-Seidel es una simple modificación del método original de Jacobi.
- Se diferencia solamente por el hecho de que cuando se quiere calcular el elemento x_i^{k+1} del vector \mathbf{x} se conoce a este nivel del cálculo todas las estimaciones recientes de x_j^{k+1} (con $j < i$).

Gauss-Seidel

- Si el proceso es convergente estos valores de x_j^{k+1} son más cercanos a los anteriores x_j^k , razón por la cual el proceso de convergencia debe ser mejor.
- La escritura matricial correspondiente al método de Gauss-Seidel es:
- $(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{b}-\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}$

Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Gauss-Seidel

- El método de Gauss-Seidel disminuye sustancialmente el número de iteraciones.
- El criterio de convergencia es similar al criterio fijado por el método de Jacobi.
- Sin embargo muchos problemas que convergen con el método de Gauss-Seidel no convergen con el método de Jacobi.

Gauss-Seidel

- De forma general si converge con Jacobi, converge más rápidamente con Gauss-Seidel.
- Esto se debe sin lugar a dudas al hecho que el vector solución se ve forzado a acercarse a la solución real y por ende entra más rápidamente en el dominio de convergencia.

Método iterativo de relajación

- El método de relajación es un método propuesto por Frankel en 1950 para reducir el número de iteraciones en los cálculos de soluciones de sistemas lineales por el método de Gauss-Seidel.

Relajación

- Se basa en obtener en cada iteración un promedio ponderado (solamente para los elementos del vector anteriores a la posición de cálculo) de la solución del método de Jacobi y de la solución del método de Gauss-Seidel.

Relajación

- La forma matricial correspondiente a esta descomposición es:

$$\omega \mathbf{L} \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - ((1 - \omega) \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \mathbf{x}^{(k)}$$

donde, ω es el parámetro de relajación.

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega) \frac{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} + \omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Relajación

- El método de relajación puede ser calculado cualquier sea el valor de $\omega > 0$.
- En el caso que ω sea igual a 1, el método es equivalente al método de Gauss-Seidel.
- Se denomina sub relajación al método cuando $\omega < 1$ y super-relajación cuando $\omega > 1$.

Relajación

- Se podría decir que si $\omega \rightarrow 0$ el método se acerca al método de Jacobi, sin embargo la expresión específica ha de ser usada en este caso.
- Para reducir el número de iteraciones es recomendable utilizar valores de ω entre 1,1 y 1,3.

Relajación

- No tiene mucho sentido buscar para la solución de un solo sistema lineal el coeficiente de relajación óptimo que minimice el número de iteraciones.

Relajación

- Pero en caso de necesitar resolver muchos sistemas lineales parecidos (por ejemplo para un estudio de sensibilidad de los parámetros térmicos en problemas de diferencias finitas o elementos finitos) esta inversión en tiempo de cálculo puede ser recuperada en la solución de todos los sistemas que se resuelven en el desarrollo del proyecto.

CONDICIÓN DE UNA MATRIZ

- Como se ha señalado anteriormente, es claro que cualquiera de los métodos numéricos ya expuestos permite obtener un valor aproximado de la solución y no la solución algebraica.
- Esto se debe fundamentalmente a que en el cálculo, se ha utilizado una representación finita de los números.

CONDICIÓN DE UNA MATRIZ

- Esto implica que se puede cometer errores en las asignaciones mismas de los números de la matriz a las variables binarias de la computadora cuando los números no son enteros.
- Por otra parte, en la secuencia de los cálculos, se genera un segundo tipo de error en las divisiones, sumas y restas con número de magnitud distinta.

CONDICIÓN DE UNA MATRIZ

- La condición de una matriz:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{I}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \text{cond}(\mathbf{A})$$

- Si la condición de \mathbf{A} es cercana a 1, la matriz está bien condicionada, mientras que se dice que la matriz está mal condicionada cuando $\text{cond}(\mathbf{A}) \gg 1$ (> 100 para una matriz pequeña).

CONDICIÓN DE UNA MATRIZ

- La condición de una matriz es un factor de magnificación del error relativo.
- Si la matriz tiende a ser singular, los elementos de la matriz inversa se tornan muy grandes (ya que el determinante tiende a cero) y por ende la norma de la matriz inversa es un número muy grande.

INVERSO DE UNA MATRIZ

- Calcular el inverso de una matriz cuadrada corresponde a obtener la matriz solución de la siguiente igualdad :
- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdot & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdot & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdot & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdot & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

INVERSO DE UNA MATRIZ

Métodos

- Eliminación de Gauss.
- Método LU.
- Matriz triangular.

INVERSO DE UNA MATRIZ

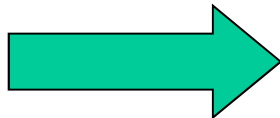
Eliminación Gaussiana

- La técnica utilizada se basa, como en el caso anterior, en realizar una serie de combinaciones lineales sobre las diferentes líneas de la matriz con el fin de hacer aparecer en posiciones particulares valores característicos del problema.

Matriz aumentada original

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdot & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdot & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdot & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdot & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Matriz
aumentada**



$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

Matriz aumentada final

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right)$$

Matriz aumentada intermedia

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & a_{31}^{(1)} & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & a_{n1}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

INVERSO DE UNA MATRIZ

- Por ende, la primera fila debe ser dividida por el coeficiente a_{11} , mientras que a cada una de las demás, se le debe aplicar una fórmula idéntica a la mencionada en el caso de eliminación Gaussiana.

Matriz inversa en el lado derecho

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & a_{1n}^{(n)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} & \dots & a_{2n}^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{31}^{(n)} & a_{32}^{(n)} & \dots & a_{3n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n1}^{(n)} & a_{n2}^{(n)} & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{array} \right)$$